JUNIO 1999 – EJERCICIO 1

En el circuito de la figura 1 se aplica a la entrada una tensión V_i = 20 V. y originalmente el interruptor A está cerrado y el interruptor B está abierto. Los resistores R1 y R2 tienen las mismas dimensiones (figura 2) pero están fabricados con diferentes materiales.

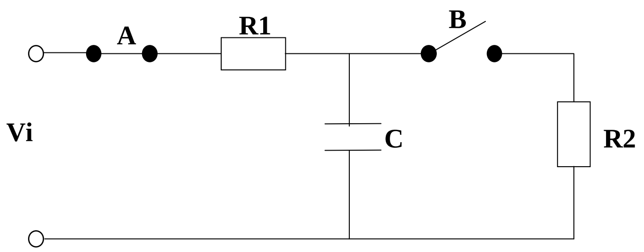


Figura 1

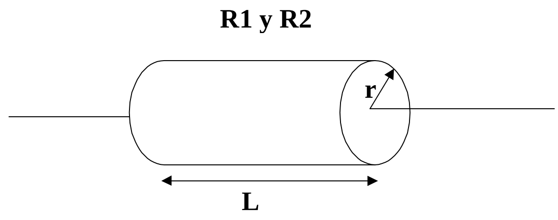


Figura 2

DATOS: Resistor R1 => ρ_1(295ºK) = 25 Ω.cm   α = 40000 ppm/ºK P_n = 5 W   Rigidez dieléctrica = 75 V.
Resistor R2 => ρ_2(295ºK) = 1500 Ω.cm R_2(295ºK) = 10 K P_n = 10 W   Rigidez dieléctrica = 75 V.
Circuito figura 1 => V_i = 20 V.   C = 20 mF

a) Calcular el valor de la resistencia del resistor R1 a temperatura ambiente (T=300 ºK)

La formula de la resistencia de un resistor es $R=\rho\dfrac{L}{S}$. Por lo tanto el valor de la resistencia del resistor R1 a 300 ºK

será: $R_1(300^o K)=\rho_1(300^o K)\dfrac{L}{S}$.

En primer lugar necesitamos calcular la resistividad del material de R1 a una temperatura de 300 ºK, y como datos se tienen el valor de dicha resistividad a 295 ºK y el coeficiente de temperatura α. Entonces se puede aplicar la formula que relaciona los valores de la resistividad de un material a diferentes temperaturas:

$$\rho=\rho_0\cdot(1+\alpha\cdot\Delta T) \quad \Rightarrow \quad \rho_1(300^o K)=\rho_1(295^o K)\cdot\left(1+\alpha\cdot(300^o K-295^o K)\right)$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\rho_1(300^o K)=25\Omega\cdot cm\left(1+\frac{40000}{10^6}{}^o K^{-1}\cdot 5^o K\right)=30\Omega\cdot cm$$

Fijarse que en la formula anterior el coeficiente de temperatura α tiene que estar expresado en $^oK^{-1}$, y no en ppm/ºK. (ppm: partes por millón). Para transformar el coeficiente de temperatura expresado en unidades de ppm/ºK a su expresión en unidades de $^oK^{-1}$ hay que dividir dicho coeficiente por 10^6 (1 unidad = 10^6 ppm).

Una vez calculada la resistividad de R1 a 300 ºK, falta saber el valor de la relación entre la longitud (L) y la superficie (S) del resistor R1. Como los resistores R1 y R2 tienen las mismas dimensiones, esta relación se puede calcular a partir de la formula de la resistencia aplicada al resistor R2 para una temperatura de 295 ºK (se supone que las dimensiones no varían con la temperatura):

$$R_2(295^o K)=\rho_2(295^o K)\frac{L}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{S}=\frac{R_2(295^o K)}{\rho_2(295^o K)}=\frac{10.000\Omega}{1.500\Omega\cdot cm}=6{,}66cm^{-1}$$

Por lo tanto sustituyendo valores en la formula inicial del valor de la resistencia del resistor R1 a 300 ºK se obtiene:

$$R_1(300^o K)=\rho_1(300^o K)\frac{L}{S}=30\Omega\cdot cm\cdot 6{,}66cm^{-1}=199{,}8\Omega$$

Obteniendo así la respuesta a este apartado

$$\boxed{R_1(300\ ^oK)=199{,}8\ \Omega}$$

(A partir de aquí suponer que R1 = 100 Ω y R2 = 1 KΩ para realizar los cálculos de los siguientes apartados)
b) ¿Cuál es la tensión máxima de trabajo de R1? ¿y la tensión máxima de trabajo de R2?

Existen dos causas por las que se puede destruir un resistor: por superar la potencia máxima que puede disipar debido al límite máximo de temperatura del material resistivo, y por superar la tensión máxima que soporta el aislante del resistor (rigidez dieléctrica).
Por lo tanto para calcular la tensión máxima de trabajo de un resistor hay que calcular las tensiones máximas establecidas por cada una de las dos causas anteriores, y el límite máximo estaría impuesto por la condición más restrictiva (de las dos tensiones máximas la de menor valor). Haciendo esto para cada uno de los resistores del problema se obtiene:

Para R1:

Tensión máxima debido a la disipación térmica

P_n=5W -> Potencia nominal (potencia máxima que puede disipar)

$P = \frac{V^2}{R}$ => $V = \sqrt{P \cdot R}$ => $V_n = \sqrt{P_n \cdot R}$ -> V_n es la tensión nominal (tensión máxima)

Sustituyendo valores se obtiene:

$$V_n = \sqrt{5W \cdot 100\Omega} = \sqrt{500V^2} = 22{,}36V$$

Tensión máxima debido a la rigidez dieléctrica

Esta tensión máxima se da como dato en el enunciado del problema: V_{rd}= 75V.

Ahora comprobamos cual es el valor más restrictivo

$V_n < V_{rd}$ => V_{MAX}= 22,36 V.

$$\boxed{V_{MAX}= 22{,}36 \text{ V.}}$$

Para R2:

Tensión máxima debido a la disipación térmica

P_n=10W -> Potencia nominal (potencia máxima que puede disipar)

$P = \frac{V^2}{R}$ => $V = \sqrt{P \cdot R}$ => $V_n = \sqrt{P_n \cdot R}$ -> V_n es la tensión nominal (tensión máxima)

Sustituyendo valores se obtiene:

$$V_n = \sqrt{10W \cdot 1000\Omega} = \sqrt{10000V^2} = 100V$$

Tensión máxima debido a la rigidez dieléctrica

Esta tensión máxima se da como dato en el enunciado del problema: V_{rd}= 75V.

Ahora comprobamos cual es el valor más restrictivo

$V_{rd} < V_n$ => V_{MAX}= 75 V.

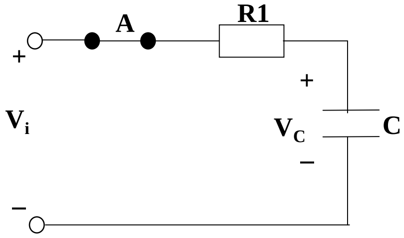
$$\boxed{V_{MAX}= 75 \text{ V.}}$$

c) Si el interruptor A se abre 1 segundo después de aplicar la tensión V_i al circuito de la figura 1, y en ese mismo instante se cierra el interruptor B, calcular la tensión en el condensador 5 segundos después de aplicar la tensión V_i al circuito (el condensador está inicialmente descargado).

Existen dos periodos de tiempo, cada uno de ellos con una situación distinta, en el circuito de la figura 1:

Periodo 1 (entre t= 0 s. y t= 1 s.) -> en este periodo el interruptor A está cerrado y el B abierto.

El circuito equivalente en este periodo será el siguiente



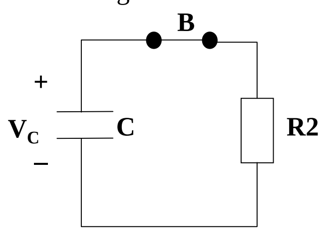
En este periodo el condensador que esta descargado (V_C= 0V) se empieza a cargar según la ecuación general de carga y descarga del condensador $V_C(t) = V_{final} + \left(V_{inicial} - V_{final}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, tendiendo a una tensión final igual a la aplicada al circuito que es V_i= 20 V. (se da como dato en el enunciado).
En primer lugar se tiene que calcular la tensión alcanzada en el condensador al final de este periodo para así saber las condiciones iniciales del siguiente periodo. Por lo tanto se aplicará la ecuación general de carga y descarga del condensador para hallar su tensión cuando ha pasado 1 segundo:
$V_{inicial}$= 0 V (inicialmente el condensador está descargado)
V_{final}= 20 V (tensión aplicada a la entrada del circuito y a la que tiende a cargarse el condensador)
τ es la constante de tiempo de carga del condensador y viene dada por el producto entre el valor de la capacidad del condensador (C) y la resistencia a través de la que se carga (R1) =>

$$\tau = C \cdot R1 = 20mF \cdot 100\Omega = 2000ms = 2s$$

Se aplica la ecuación general pata t= 1s:

$$V_C(t = 1s) = 20V + (0 - 20V) \cdot e^{-\frac{1s}{2s}} = 20V \cdot (1 - 0{,}6065) = 7{,}87V$$

Periodo 2 (entre t = 1 s. y t= 5 s.) -> en este periodo el interruptor A está abierto y el B cerrado.
El circuito equivalente en este periodo será el siguiente



En este periodo el condensador que tiene una tensión inicial V_C= 7,87V (a la que se cargo en el primer periodo), se empieza a descargar a través del resistor R2 según la ecuación general de carga y descarga del condensador, tendiendo a descargarse completamente (tensión final de 0V).
Cuando pases 5 segundos después de aplicar la tensión V_i al circuito, el condensador lleva descargándose 4 segundos (ya que ha pasado 1 segundo cargándose en el primer periodo). Para calcular la tensión del condensador a los 5 segundos después de aplicar la tensión V_i al circuito, se tiene que calcular la tensión alcanzada en el condensador después de 4 segundos de descarga. Por lo tanto se aplicará la ecuación general del condensador para hallar su tensión cuando ha pasado 4 segundos de este periodo de descarga:
$V_{inicial}$= 7,87 V (tensión a la que se cargo en el primer periodo)
V_{final}= 0 V (el condensador tiende a descargarse completamente)
τ es la constante de tiempo de descarga del condensador y viene dada por el producto entre el valor de la capacidad del condensador (C) y la resistencia a través de la que se descarga (R2) =>

$$\tau = C \cdot R2 = 20mF \cdot 1000\Omega = 20000ms = 20s$$

Se aplica la ecuación general pata t= 4s:

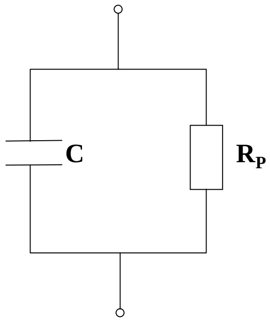
$$V_C(t = 4s) = 0V + (7{,}87V - 0V) \cdot e^{-\frac{4s}{20s}} = 7{,}87V \cdot 0{,}818 = 6{,}43V$$

Por lo tanto la tensión del condensador 5 segundos después de aplicar la tensión V_i al circuito es V_C= 6,43V

$$\boxed{V_C = 6{,}43V}$$

d) Si el dieléctrico del condensador tiene una resistencia de 10 MΩ, calcular el factor de pérdidas del condensador para una frecuencia de 1 KHz. ¿Cuál sería el factor de pérdidas de un condensador ideal?

El dato que se da es el valor resistivo que caracteriza al dieléctrico y que se corresponde con la resistencia de aislamiento del condensador. Por lo tanto para calcular el factor de pérdidas del condensador se puede utilizar el circuito equivalente paralelo porque la resistencia paralelo (R_P) es la que representa la resistencia de aislamiento:



El factor de pérdidas para este circuito equivalente paralelo tiene la siguiente expresión: $D = tg\delta = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_P \cdot C}$

Lo único que se tiene que hacer es sustituir valores en esta fórmula:
f= 1 KHz (frecuencia)
R_P= 10 MΩ (resistencia de aislamiento)
C= 20 mF (capacidad del condensador)

$$D = tg\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1000 s^{-1} \cdot 10^{7} \Omega \cdot 20 \cdot 10^{-3} F} = 7{,}95 \cdot 10^{-10}$$

$$\boxed{D = tg\delta = 7{,}95 \cdot 10^{-10}}$$

Un condensador ideal tendría una resistencia de aislamiento infinita, por lo que si se aplica la anterior formula con R_P= ∞ se obtiene que D = tgδ = 0.

Para un condensador ideal => $\boxed{D = tg\delta = 0}$